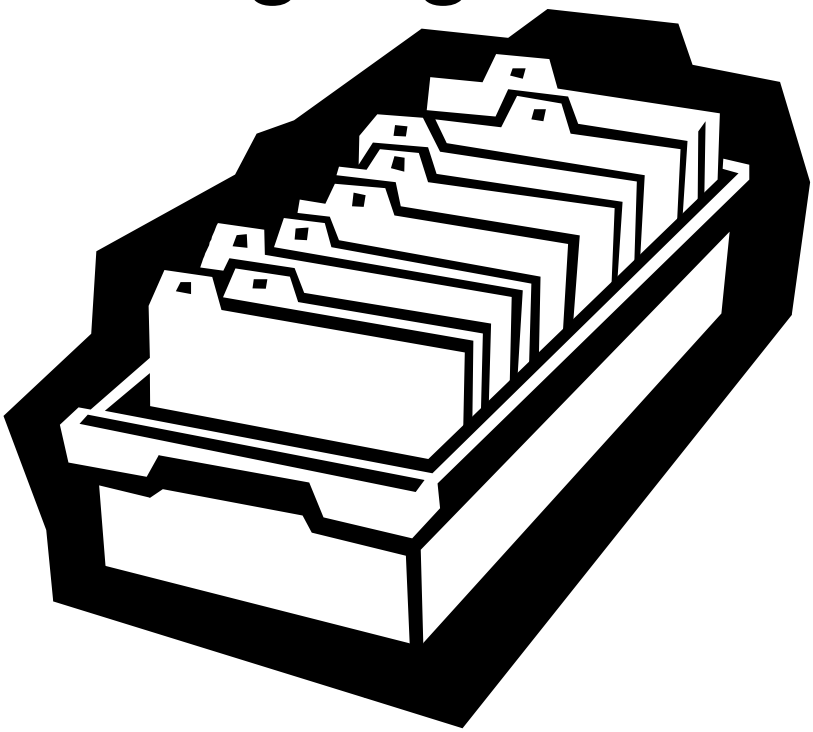
Lösungen zu den Karteikarten für Intensivierungsstunden in Jahrgangsstufe 11



Gruppe E

(Geometrie – Grundlagen)

– Angaben ohne Gewähr –

Gruppe E	Thema *Geometrie – Grundlagen*	Schwierigkeit: weiß

E01

a) $\vec{c}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot4-\ \ 0\cdot0\\-(3\cdot4-\ (-1)\cdot0)\\3\cdot0\ -(-1)\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-12\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot4\ -\ 0\cdot3\\-(1\cdot4-(-1)\cdot3)\\1\cdot0\ -(-1)\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-7\\2\end{pmatrix}$

$|\vec{a}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}\quad|\vec{b}|=\sqrt{1+0+16}=\sqrt{17}\quad\vec{b}\circ\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}=-3-0+0=-3$

b) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2-1\\3\ +1\\-2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\\-2\end{pmatrix}\quad\overline{AB}=\sqrt{9+16+4}=\sqrt{29}$

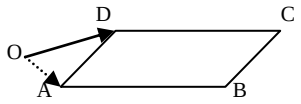
$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1-1\\2+1\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\quad\overline{AC}=\sqrt{0+9+1}=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}-2-1\\3\ -2\\-2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-3\end{pmatrix}\quad\overline{CB}=\sqrt{9+1+9}=\sqrt{19}$

Der Winkel α ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Also:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\begin{pmatrix}-3\\4\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{10}}=\frac{10}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{10}}\Rightarrow\alpha=54{,}04°$$

c) Hilfreich ist eine kleine Skizze



Gesucht ist als der Ortsvektor von D, der vom Ursprung O zu D verläuft. Geht man auf bekannten Wegen, so läuft man erst nach A und dann von dort zu D entlang des Vektors $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$ (Gleiche Richtung, Länge und Orientierung wie $\overrightarrow{AD}$). Also:

$\vec{D}=\vec{A}+\left(-\overrightarrow{CB}\right)=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$ **D(4|–2|3)**

Flächeninhalt:

$$A=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|\begin{pmatrix}-3\\4\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}10\\3\\-9\end{pmatrix}\right|=\sqrt{190}$$

Gruppe E	Thema *Geometrie – Grundlagen*	Schwierigkeit: weiß

E02

a) $\vec{c}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot3-\ \ 0\cdot0\\-(5\cdot3-\ (-2)\cdot0)\\5\cdot0\ -(-1)\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-15\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot4\ -\ 0\cdot2\\-(1\cdot3-(-2)\cdot2)\\1\cdot0\ -(-2)\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-7\\8\end{pmatrix}$

$|\vec{a}|=\sqrt{1+16+4}=\sqrt{21}\quad|\vec{b}|=\sqrt{4+0+9}=\sqrt{13}\quad\vec{b}\circ\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\-1\\0\end{pmatrix}=-10-0+0=-10$

b) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1-3\\5\ +2\\-3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\7\\-3\end{pmatrix}\quad\overline{AB}=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$

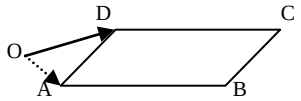
$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2-3\\3+2\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix}\quad\overline{AC}=\sqrt{1+25+4}=\sqrt{30}$

$\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}-1-2\\5\ -3\\-3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix}\quad\overline{CB}=\sqrt{9+4+25}=\sqrt{38}$

Der Winkel α ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Also:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\begin{pmatrix}-4\\7\\-3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix}}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{30}}=\frac{33}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{30}}\Rightarrow\alpha=45{,}54°$$

c) Hilfreich ist eine kleine Skizze



Gesucht ist als der Ortsvektor von D, der vom Ursprung O zu D verläuft. Geht man auf bekannten Wegen, so läuft man erst nach A und dann von dort zu D entlang des Vektors $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$ (Gleiche Richtung, Länge und Orientierung wie $\overrightarrow{AD}$). Also:

$\vec{D}=\vec{A}+\left(-\overrightarrow{CB}\right)=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-4\\5\end{pmatrix}$ **D(6|–4|5)**

Flächeninhalt:

$$A=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|\begin{pmatrix}-4\\7\\-3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}29\\11\\-13\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1131}$$

Gruppe E	**Thema** *Geometrie – Grundlagen*	**Schwierigkeit:** weiß

E03

a) $\vec{c}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-5\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\cdot1-\ \ 0\cdot0\\-(4\cdot1-\ (-5)\cdot0)\\4\cdot0\ -(-5)\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-4\\-25\end{pmatrix}$ $\quad\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot1\ -\ 0\cdot5\\-(4\cdot4-(-5)\cdot5)\\4\cdot0\ -(-5)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-41\\15\end{pmatrix}$

$|\vec{a}|=\sqrt{16+9+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\quad|\vec{b}|=\sqrt{25+0+1}=\sqrt{26}\quad\vec{b}\circ\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\-5\\0\end{pmatrix}=-20-0+0=-20$

b) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2-5\\4\ +4\\-5-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\8\\-5\end{pmatrix}\quad\overline{AB}=\sqrt{49+64+25}=\sqrt{138}$

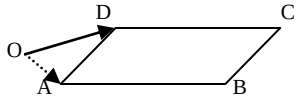
$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3-5\\2+4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}\quad\overline{AC}=\sqrt{4+36+9}=\sqrt{49}=7$

$\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}-2-3\\4\ -2\\-5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\\-8\end{pmatrix}\quad\overline{CB}=\sqrt{25+4+64}=\sqrt{93}$

Der Winkel α ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Also:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\begin{pmatrix}-7\\8\\-5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{138}\cdot7}=\frac{47}{\sqrt{138}\cdot7}\Rightarrow\alpha=55{,}14°$$

c) Hilfreich ist eine kleine Skizze



Gesucht ist als der Ortsvektor von D, der vom Ursprung O zu D verläuft. Geht man auf bekannten Wegen, so läuft man erst nach A und dann von dort zu D entlang des Vektors $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$ (Gleiche Richtung, Länge und Orientierung wie $\overrightarrow{AD}$). Also:

$\vec{D}=\vec{A}+\left(-\overrightarrow{CB}\right)=\begin{pmatrix}5\\-4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\2\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-6\\8\end{pmatrix}$ **D(10|–6|8)**

Flächeninhalt:

$$A=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\left|\begin{pmatrix}-7\\8\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}54\\31\\-26\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4553}$$

Gruppe E	**Thema** *Geometrie – Grundlagen*	**Schwierigkeit:** weiß

E03

a) $\vec{c}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\-5\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\cdot1-\ \ 0\cdot0\\-(4\cdot1-\ (-5)\cdot0)\\4\cdot0\ -(-5)\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-4\\-25\end{pmatrix}$ $\quad\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot1\ -\ 0\cdot5\\-(4\cdot4-(-5)\cdot5)\\4\cdot0\ -(-5)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-41\\15\end{pmatrix}$

$|\vec{a}|=\sqrt{16+9+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\quad|\vec{b}|=\sqrt{25+0+1}=\sqrt{26}\quad\vec{b}\circ\vec{c}=\begin{pmatrix}-5\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\-5\\0\end{pmatrix}=-20-0+0=-20$

b) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2-5\\4\ +4\\-5-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\8\\-5\end{pmatrix}\quad\overline{AB}=\sqrt{49+64+25}=\sqrt{138}$

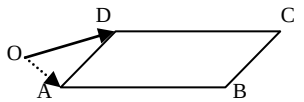
$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3-5\\2+4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}\quad\overline{AC}=\sqrt{4+36+9}=\sqrt{49}=7$

$\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}-2-3\\4\ -2\\-5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\\-8\end{pmatrix}\quad\overline{CB}=\sqrt{25+4+64}=\sqrt{93}$

Der Winkel α ist der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Also:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\begin{pmatrix}-7\\8\\-5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{138}\cdot7}=\frac{47}{\sqrt{138}\cdot7}\Rightarrow\alpha=55{,}14°$$

c) Hilfreich ist eine kleine Skizze



Gesucht ist als der Ortsvektor von D, der vom Ursprung O zu D verläuft. Geht man auf bekannten Wegen, so läuft man erst nach A und dann von dort zu D entlang des Vektors $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}$ (Gleiche Richtung, Länge und Orientierung wie $\overrightarrow{AD}$). Also:

$\vec{D}=\vec{A}+\left(-\overrightarrow{CB}\right)=\begin{pmatrix}5\\-4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\2\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-6\\8\end{pmatrix}$ **D(10|–6|8)**

Flächeninhalt:

$$A=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\left|\begin{pmatrix}-7\\8\\-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\6\\3\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}54\\31\\-26\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4553}$$

Karteikarten für Jg. 11 © H. Drothler www.drothler.net

Gruppe E	**Thema** *Geometrie – Grundlagen*	**Schwierigkeit:** gelb

E01

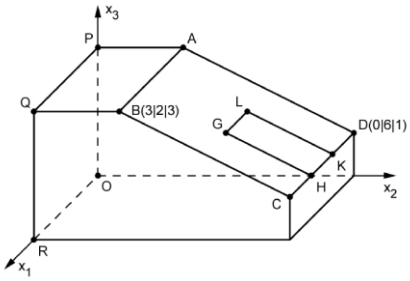


Abb. 1

a) P liegt lotrecht über dem Ursprung, hat also nur eine andere x_3-Koordinate, die so groß sein muss wie die von B und von A.

P(0|0|3) und A(0|2|3) (Denn A ist in x_2 Richtung so weit wie B verschoben.)

Q und R haben dieselbe x_1-Koordinate wie B, wobei Q auf derselben Höhe (x_3) wie B liegt und R auf derselben Höhe wie O. **Q(3|0|3)** **R(3|0|0)**

Damit beträgt die Höhe der Wand **3** Längeneinheiten.

Die Höhe der anderen Wand erkennt man an der x_3-Koordinate von C bzw. D. Sie beträgt **1 LE**. Da C an derselben Wand liegt wie B haben C und B dieselbe x_1-Koordinate, also: **C(3|6|1)**

b) **Koordinaten der Punkte**

L(1|4|2) gegenüber G liegt L in x_1-Richtung um –1 verschoben, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von G.

H(2|6|1) gegenüber C liegt H in x_1-Richtung verschoben und hat dieselbe x_1-Koordinate wie G, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von C.

K(1|6|1) gegenüber H liegt K in x_1-Richtung um –1 verschoben, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von H.

Flächeninhalt:

Es handelt sich um ein Rechteck mit der Länge $\overline{KH} = 1$ und der Breite $\overline{GH}$

$$\overline{GH} = \left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2-2 \\ 6-4 \\ 1-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Fläche: $A = 1 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}$

Gruppe E	**Thema** *Geometrie – Grundlagen*	**Schwierigkeit:** gelb

E01

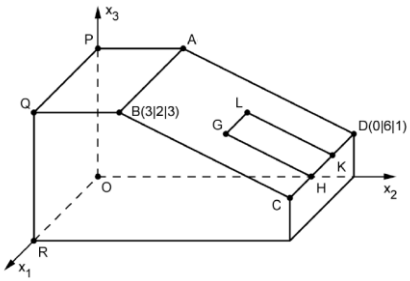


Abb. 1

a) P liegt lotrecht über dem Ursprung, hat also nur eine andere x_3-Koordinate, die so groß sein muss wie die von B und von A.

P(0|0|3) und A(0|2|3) (Denn A ist in x_2 Richtung so weit wie B verschoben.)

Q und R haben dieselbe x_1-Koordinate wie B, wobei Q auf derselben Höhe (x_3) wie B liegt und R auf derselben Höhe wie O. **Q(3|0|3)** **R(3|0|0)**

Damit beträgt die Höhe der Wand **3** Längeneinheiten.

Die Höhe der anderen Wand erkennt man an der x_3-Koordinate von C bzw. D. Sie beträgt **1 LE**. Da C an derselben Wand liegt wie B haben C und B dieselbe x_1-Koordinate, also: **C(3|6|1)**

b) **Koordinaten der Punkte**

L(1|4|2) gegenüber G liegt L in x_1-Richtung um –1 verschoben, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von G.

H(2|6|1) gegenüber C liegt H in x_1-Richtung verschoben und hat dieselbe x_1-Koordinate wie G, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von C.

K(1|6|1) gegenüber H liegt K in x_1-Richtung um –1 verschoben, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von H.

Flächeninhalt:

Es handelt sich um ein Rechteck mit der Länge $\overline{KH} = 1$ und der Breite $\overline{GH}$

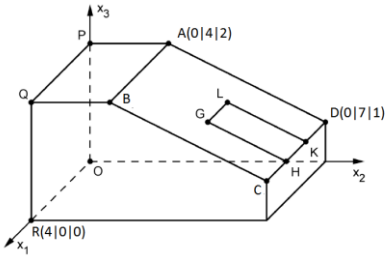
$$\overline{GH} = \left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2-2 \\ 6-4 \\ 1-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Fläche: $A = 1 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5}$

Karteikarten für Jg. 11 © H. Drothler www.drothler.net

Gruppe E	Thema *Geometrie – Grundlagen*	Schwierigkeit: gelb

E02



a) P liegt lotrecht über dem Ursprung, hat also nur eine andere x_3-Koordinate, die so groß sein muss wie die von A. **P(0|0|2)**

Damit beträgt die Höhe der Wand **2** Längeneinheiten.

Q und B haben dieselbe x_3 Koordinate wie A und sind in x_1 Richtung genauso weit wie R verschoben. B hat dieselbe x_2-Koordinate wie A und Q wie P. **B(4|4|2) und Q(4|0|2)**

C hat dieselbe x_1-Koordinate wie R, dieselbe Höhe (x_3) und dieselbe x_2-Koordinate wie D. **C(4|7|1)**

Die Höhe der anderen Wand erkennt man an der x_3-Koordinate von C bzw. D. Sie beträgt **1 LE**.

b) **Koordinaten der Punkte**

L(1|5,5|1,5) gegenüber G liegt L in x_1-Richtung um –2 verschoben, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von G.

H(3|7|1) gegenüber C liegt H in x_1-Richtung verschoben und hat dieselbe x_1-Koordinate wie G, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von C.

K(1|7|1) gegenüber H liegt K in x_1-Richtung um –2 verschoben, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von H.

Flächeninhalt:

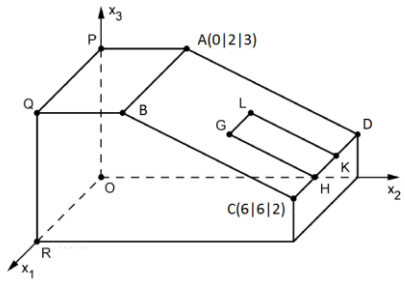
Es handelt sich um ein Rechteck mit der Länge $\overline{KH} = 2$ und der Breite $\overline{GH}$

$$\overline{GH} = \left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3-3 \\ 7-5,5 \\ 1-1,5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2,25+0,25} = \sqrt{2,5}$$

Fläche: $A = 2 \cdot \sqrt{2,5}$

Gruppe E	Thema *Geometrie – Grundlagen*	Schwierigkeit: gelb

E03



a) P liegt lotrecht über dem Ursprung, hat also nur eine andere x_3-Koordinate, die so groß sein muss wie die von A. **P(0|0|3)**

Damit beträgt die Höhe der Wand **3** Längeneinheiten.

Q und B haben dieselbe x_3 Koordinate wie A und sind in x_1 Richtung genauso weit wie C und R verschoben. B hat dieselbe x_2-Koordinate wie A und Q sowie R dieselbe wie P. R liegt auf dem Boden, also $x_3 = 0$ **B(6|2|3), Q(6|0|3) und R(6|0|0)**

D hat dieselbe x_1-Koordinate wie A, dieselbe Höhe (x_3) und dieselbe x_2-Koordinate wie C. **D(0|6|2)**

Die Höhe der anderen Wand erkennt man an der x_3-Koordinate von C bzw. D. Sie beträgt **2 LE**.

b) **Koordinaten der Punkte**

L(3|4|2,5) gegenüber G liegt L in x_1-Richtung um –2 verschoben, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von G.

H(5|6|2) gegenüber C liegt H in x_1-Richtung verschoben und hat dieselbe x_1-Koordinate wie G, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von C.

K(3|6|2) gegenüber H liegt K in x_1-Richtung um –2 verschoben, die anderen Koordinaten sind dieselben wie die von H.

Flächeninhalt:

Es handelt sich um ein Rechteck mit der Länge $\overline{KH} = 2$ und der Breite $\overline{GH}$

$$\overline{GH} = \left|\overrightarrow{GH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5-5 \\ 6-4 \\ 2-2,5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+0,25} = \sqrt{4,25}$$

Fläche: $A = 2 \cdot \sqrt{4,25}$

E01 a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3+1\\-1+2\\-2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overline{AB}=\sqrt{16+1+1}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1+1\\-3+2\\-1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\overline{AC}=\sqrt{4+1+4}=3$

$\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}3-1\\-1+3\\-2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\overline{CB}=\sqrt{4+4+1}=3$

Ein rechter Winkel kann nur zwischen den gleichlangen Schenkeln liegen.

$\overrightarrow{CA}\circ\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=-4+2+2=0 \quad\Rightarrow\quad \sphericalangle\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=90°$

Damit ist gezeigt: Das Dreieck ist bei C rechtwinklig und die beiden Katheten sind gleich lang.

b) Da die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks gleich groß sind und hier zusammen 90° ergeben müssen, ist jeder von ihnen 45°.

Alternative:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}}{3\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{9}{\sqrt{2}\cdot 9}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=45°$$

Winkelhalbierender Vektor:

$$\vec{w}=\overrightarrow{AB^o}+\overrightarrow{AC^o}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{4}{3\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\\\frac{1}{3\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\\\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4+2\sqrt{2}\\1-\sqrt{2}\\1+2\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

c) Um das Volumen eines Kegels zu berechnen, benötigt man die Höhe h des Kegels und den Radius r seines Grundkreises. Da das Dreieck um eine der Katheten rotiert, ist eine der Katheten der Radius und die andere (die Rotationsachse) die Höhe.

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot 3^2\cdot 3=9\pi$$

E02 a)

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{B_kA}&=\begin{pmatrix}2-2\\-1-5\\-2-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-6\\-2-k\end{pmatrix}\\\overrightarrow{B_kB_6}&=\begin{pmatrix}2-2\\5-5\\6-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\6-k\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\ \overrightarrow{B_kA}\circ\overrightarrow{B_kB_6}=\begin{pmatrix}0\\-6\\-2-k\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\6-k\end{pmatrix}=(-2-k)(6-k)=0 \qquad \text{Also } k=-2 \text{ oder } k=6$$

b) Rückseite c)

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AB_6}\circ\overrightarrow{AB_{-2}}}{\left|\overrightarrow{AB_6}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB_{-2}}\right|}=\frac{\begin{pmatrix}2-2\\5+1\\6+2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2-2\\5+1\\-2+2\end{pmatrix}}{\left|\overrightarrow{AB_6}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB_{-2}}\right|}=\frac{\begin{pmatrix}0\\6\\8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{100}\cdot\sqrt{36}}=\frac{36}{60}\Rightarrow\alpha=53{,}13°$$

$$\cos\alpha^*=\frac{\overrightarrow{AB_1}\circ\overrightarrow{AB_{-2}}}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB_{-2}}\right|}=\frac{\begin{pmatrix}2-2\\5+1\\1+2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2-2\\5+1\\-2+2\end{pmatrix}}{\left|\overrightarrow{AB_6}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB_{-2}}\right|}=\frac{\begin{pmatrix}0\\6\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{36}}=\frac{36}{18\sqrt{5}}\Rightarrow\alpha^*=26{,}565°=\frac{\alpha}{2}$$

d) Es rotiert also um die Strecke $[B_{-2}B_6]$. Diese stellt die Höhe h des Kegels dar. Der Radius r des Grundkreises ist somit die andere Kathete $[AB_{-2}]$.

$$h=\overline{B_{-2}B_6}=\left|\overrightarrow{B_{-2}B_6}\right|=\left|\begin{pmatrix}2-2\\5-5\\6+2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}\right|=8 \quad r=\overline{AB_{-2}}=\left|\overrightarrow{AB_{-2}}\right|=\left|\begin{pmatrix}2-2\\5+1\\-2+2\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\right|=6 \qquad V=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 8=96\pi$$

Gruppe E	Thema *Geometrie – Grundlagen*	Schwierigkeit: grün

E02 b)